Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις No. 5ο Date 21/10/19

Άσκηση 16 / φυλλάδιο

$$|q(x)| < |p(x)|, \; x \geq 0$$

(p) $y' + py = 0$
(q) $z' + qz = 0$
$\Big\}$ $\forall$ λυση της (Q) $\to 0$ $\Rightarrow \forall$ λύση τη (P) $\to 0$

<u>Λύση:</u>

θα χρησιμοποιήσουμε ενα αντιπαράδειγμα

Αν $q(x) = +1$

$p(x) = -1$

Τοτε $z(x) = c_1 \cdot e^{-\int q(x)dx} = c_1 \cdot e^{-x} \xrightarrow{+\infty} 0$

$y(x) = c_2 \cdot e^{-\int p(x)dx} = c_2 \cdot e^{+x} \to +\infty$

Ενω $\to 0$ οταν $c_2 = 0$

<u>Ασκηση 27</u>

$y' = ay + b$ (1), $a, b \in C([0, +\infty))$

(ii) $\left.\begin{array}{l} 0 < k \leq \alpha(x) \\ |b(x)| \leq M \end{array}\right\} \Rightarrow \exists!$ λυση (+) που είναι φραγμένη και $y(x) = -\int_x^\infty b(s)\, e^{\int \alpha(t)dt} ds, \; t \geq 0.$

<u>Λύση:</u>

$$y'(x) = b(x)\, e^{\int_x^x \alpha(t)dt} - \int_x^{+\infty} b(s)\, e^{\int_s^x \alpha(t)dt} \alpha(x) ds$$

(1) $\Rightarrow y' - ay = b$ τοτε

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x \alpha(s)} \left(y(x_0) + \int_{x_0}^x b(s)\, e^{\int_{x_0}^s \alpha(n)\, dn} ds \right)$$

Υπενθύμιση: $\frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^x F(s,x) ds = F(x,x) + \int_{x_0}^x \frac{\partial F(s,x)}{\partial(x)} ds$

Υπενθυμίσεις:

- $y' = P(x)Q(y) \Rightarrow \frac{y'}{Q(y)} = P(x)$

$\frac{dy}{dx} = P(x)Q(y)$

$$\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x)dx$$

Παράδειγμα 3 $\{M(x,y)dx + N(x,y) = 0\}$

$$(y^2-1)dx + y(x-1)dy = 0 \quad , y(0) = -2$$

$$(y^2-1)dx = (1-x)ydy$$

$$\frac{dx}{1-x} = \frac{y}{y^2-1}dy$$

Τώρα ολοκληρώνουμε και αν θέλουμε χρησιμοποιούμε την αρχική τιμή.

Έχουμε: $- \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-1}dy + C_1$

→ με αόριστη ολοκλ.

$$\Rightarrow -\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln|y^2-1| + C_1$$

$$\Rightarrow -C_1 = \frac{1}{2}\ln|y^2-1| + \ln|x-1|$$

$$\Rightarrow -2C_1 = \ln|y^2-1|(x-1)^2$$

$$\Rightarrow C_1 = \ln|y^2-1|(x-1)^2 \quad , y(0) = -2$$

$$\Rightarrow e^{C_1} = |y^2-1|(x-1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\pm e^{C_1}}{(x-1)^2} = y^2 - 1 \Rightarrow y^2(x) = \pm \frac{e^{C_1}}{(x-1)^2}$$

No. Date

$\Rightarrow y^2(x) = 1 + \frac{k}{(x-1)^2}$ αφου e^c σταθερά

$y(x) = -\sqrt{1 + \frac{k}{(x-1)^2}}$, $x<1$

Ασκηση 2 iii) σελ. 41.

$(xy^2 + y^2 + x + 1)dx + (y-1)dy = 0$ (1), $y(2) = 0$

γενική μορφή: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

$(1) \Rightarrow (y^2+1)(x+1)dx + (y-1)dy = 0$ ‖ Είναι χωριζομένων μεταβλητών

$(x+1)dx = -\frac{y-1}{y^2+1}dy$

$$\frac{x^2}{2} + x + C_1 = -\int \frac{y}{y^2+1}dy + \int \frac{1}{y^2+1}dy$$

$$\frac{x^2}{2} + x + C = -\frac{1}{2}\ln(y^2+1) + \text{Arctan}\,y \quad (2)$$

$$y(2) = 0 \Rightarrow 2 + 2 + C = \underbrace{\frac{1}{2}\ln 1 + \text{Arctan}\,0}_{=0}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = -4}$$

οι λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών λύνεται απο το (2)

ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ορισμός

(*) $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ομογενής βαθμού n:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y) \quad \forall\, x,y \in \Omega$$

f, g ομογ. βαθμού n

$$y' = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{g(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})}{f(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})} = \frac{\cancel{x^n} g(1, \frac{y}{x})}{\cancel{x^n} g(1, \frac{y}{x})} \quad (1)$$

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow zx = y$$

$$\boxed{z'x + z = y'} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$z'x + z = \frac{g(1,z)}{f(1,z)} \Rightarrow x\frac{dz}{\partial x} = \frac{g(1,z)}{f(1,z)} - z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\frac{g(1,z)}{f(1,z)} - z} = \frac{dx}{x}$$

Άσκηση 3

ii) $(x\cdot e^{y/x} + y)dx - xdy = 0, \quad x \neq 0.$

Θέτω $\frac{y}{x} = z$

$\Rightarrow zx = y$

$\Rightarrow y' = z'x + z$

$$\Rightarrow e^z + z = y' = z'x + z$$

$$\Rightarrow e^z = z'x \Rightarrow e^z = x\frac{\partial z}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial x}{x} = \frac{\partial z}{e^z}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = -e^{-z} + C \Rightarrow e^z = c - \ln|x| \Rightarrow z = \ln(c - \ln|x|)$$

$$y = x\ln(\ldots)$$

ΑΣΚΗΣΗ 4ii) σελ. 4

$$x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = \left[1 + \frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx,\quad y(1)=0,\ x>0.$$

$z.\quad \Rightarrow z'x + z = y'$

$$(\sin z)(z'x+z) = 1 + z\sin z$$

$$\Rightarrow x\sin z\, z' + \cancel{z\sin z} = 1 + \cancel{z\sin z}$$

$$\Rightarrow \sin z\,\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \qquad z(1) = \frac{y(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\Rightarrow \sin z\, dz = \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^z \sin s\, ds = \int_1^x \frac{ds}{s} \quad // \quad -\cos s\Big|_0^z - \ln s\Big|_1^x \quad 1-\cos z - \ln x$$

$$\boxed{\cos\frac{y}{x} = 1 - \ln x \quad x>0}$$